opracował Maciej Grzesiak

Analiza wektorowa

1. Funkcje wektorowe

1.1. Funkcje wektorowe na płaszczyźnie

Wektor $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ nazywamy *wektorem wodzącym punktu* (x, y). Jeśli x oraz y są funkcjami czasu, tj. $x = x(t)$, $y = y(t)$, to

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j},$$

jest wektorową funkcją czasu. Przy zmieniającej się wartości t wektor $\vec{r}(t)$ zakreśla krzywą na płaszczyźnie. Można ją równoważnie określić parą funkcji rzeczywistych $x = x(t)$, $y = y(t)$. Taki układ równości nazywamy *równaniami parametrycznymi* krzywej.
Wiele pojęć znanych dla funkcji liczbowych przenosi się na funkcje wektorowe. Np.

$$\lim_{t\to a} \vec{r}(t) = \lim_{t\to a} x(t)\vec{i} + \lim_{t\to a} y(t)\vec{j}.$$

Funkcję wektorową nazywamy ciągłą w punkcie a, jeśli $\lim_{t\to a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a)$. Równoważnie, oznacza to, że obie funkcje $x(t)$, $y(t)$ są ciągłe w punkcie a.
Można też określić pochodną:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{r}\,'(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t},$$

oczywiście tylko wtedy, gdy ta granica istnieje. Wtedy

$$\vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}.$$

Gdy $\Delta t \to 0$, to wektor $\frac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$ staje się coraz bardziej styczny do krzywej. Uzasadnione jest więc nazwanie wektora $\vec{r}\,'(t_0)$ *wektorem stycznym* do krzywej $\vec{r}(t)$ w punkcie t_0.
Zbiór punktów

$$\vec{r}(t_0) + \vec{r}\,'(t_0)(t - t_0), \quad t \in \mathbb{R},$$

jest prostą styczną do krzywej $\vec{r}(t)$ w punkcie t_0.
Przykład. Rozważmy krzywą określoną równaniami $x = t+2$, $y = (t-1)^2$ (lub równoważnie $\vec{r}(t) = (t+2)\vec{i}+(t-1)^2\vec{j}$). Znajdziemy styczną w punkcie odpowiadającym parametrowi $t = 2$. Mamy $\vec{r}(2) = 4\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{r}\,'(t) = \vec{i} + 2(t-1)\vec{j}$ oraz $\vec{r}\,'(2) = \vec{i} + 2\vec{j}$. Zatem równanie stycznej to:

$$\vec{r}(t) = 4\vec{i} + \vec{j} + (\vec{i} + 2\vec{j})(t-2) = (t+2)\vec{i} + (2t-3)\vec{j},$$

lub inaczej: $x = t + 2$, $y = 2t - 3$; albo jeszcze inaczej: $y = 2(t + 2) - 7 = 2x - 7$.
W zastosowaniach fizycznych pochodną $\vec{r}\,'(t)$ interpretujemy jako wektor prędkości ruchu punktu, którego położenie określa funkcja $\vec{r}(t)$. Wartość tej prędkości jest długością wektora:

$$v = |\vec{v}| = |\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

Z kolei pochodna prędkości jest przyspieszeniem:

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\vec{j}$$

Przykład. Ruch cząstki opisany jest równaniem $\vec{r}(t) = 2\cos t \cdot \vec{i} + \sin t \cdot \vec{j}$. Znaleźć wektory prędkości i przyspieszenia oraz wartości tych wektorów. Wskazać punkty, w których te wartości są największe i najmniejsze.

$$\vec{v} = \vec{r}\,'(t) = -2\sin t \cdot \vec{i} + \cos t \cdot \vec{j},$$

$$v = \sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{4 - 3\cos^2 t},$$

$$\vec{a}(t) = -2\cos t \cdot \vec{i} - \sin t \cdot \vec{j}'$$

$$a = \sqrt{4\cos^2 t + \sin^2 t} = \sqrt{4 - 3\sin^2 t},$$

1.2. Wektory w przestrzeni

Funkcję wektorową w przestrzeni określamy analogicznie jak na płaszczyźnie:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Tak jak poprzednio określamy pochodną:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{r}\,'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t},$$

i mamy

$$\vec{r}\,'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}.$$

Wektor $\vec{r}\,'(t_0)$ jest wektorem stycznym do krzywej $\vec{r}(t)$ w punkcie t_0. W interpretacji fizycznej ten wektor jest prędkością. Wartość tej prędkości to:

$$v = |\vec{v}| = |\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}.$$

Warto zwrócić uwagę, że przy obliczaniu pochodnej iloczynu mamy zawsze zwykły wzór, chociaż iloczyny mogą być rozmaite:
— iloczyn funkcji skalarnej i wektorowej:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(t)\vec{u}(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\vec{u}(t) + f(t)\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}$$

— iloczyn skalarny funkcji wektorowych:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\vec{u}(t) \circ \vec{v}(t)\Big) = \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} \circ \vec{u}(t) + \vec{u}(t) \circ \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

— iloczyn wektorowy funkcji wektorowych:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)\Big) = \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} \times \vec{u}(t) + \vec{u}(t) \times \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

Przykład. Wykazać, że jeśli na ciało o masie m, poruszające się po krzywej określonej funkcją $\vec{r}(t)$ działa siła centralna $F(x, y, z)$, to
a) moment pędu jest stały
b) ciało pozostaje stale w jednej płaszczyźnie.
Rozwiązanie. Przypomnijmy, że pęd określamy jako $m\vec{v} = m\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$, moment pędu to $\overrightarrow{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$, a moment siły to $\overrightarrow{N} = \vec{r} \times \vec{F}$.
Z drugiej zasady dynamiki wiemy, że

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F},$$

stąd po pomnożeniu przez $\vec{r}$ mamy

$$m\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{r} \times \overrightarrow{F}.$$

Ale

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t},$$

więc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}\times m\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)=\vec{r}\times\overrightarrow{F},$$

czyli

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}}{\mathrm{d}t}=\overrightarrow{N}.$$

Moment siły jest więc pochodną momentu pędu. Jeżeli siła $\overrightarrow{F}$ jest centralna (tzn. skierowana wzdłuż promienia), to $\overrightarrow{N}=\vec{r}\times\overrightarrow{F}=\vec{0}$, więc

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{0},$$

a zatem $\overrightarrow{L}$ =const.
W szczególności nie zmienia się kierunek wektora $\overrightarrow{L}$, a więc ruch odbywa się stale w jednej płaszczyźnie (prostopadłej do wektora $\overrightarrow{L}$).

1.3. Pochodna kierunkowa

Pochodna funkcji $f(x,y)$ w kierunku wektora $\vec{v}=[v_1,v_2]$ jest obliczana tak, że punkty (x_0+tv_1,y_0+tv_2) przebiegają prostą wyznaczoną przez (x_0,y_0) i wektor $\vec{v}$. Wersor tego wektora to $\vec{u}=[\cos\alpha,\sin\alpha]$, gdzie α jest kątem jaki wektor $\vec{v}$ tworzy z osią Ox. Zatem prosta ma równania parametryczne

$$x=x_0+s\cos\alpha,\ y=y_0+s\sin\alpha,\quad s\in\mathbb{R}.$$

A więc $f(x,y)=f(x(s),y(s))$ jest funkcją jednej zmiennej oraz

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{v}}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha.$$

Prawa strona jest więc iloczynem skalarnym wektorów

$$\nabla f\stackrel{\mathrm{def}}{=}\left[\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial \mathbf{y}}\right],\quad [\cos\alpha,\sin\alpha].$$

Symbol ∇ czytamy: nabla.
Zatem gdy φ jest kątem między wektorami $\vec{v}$ i ∇f, to

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}=|\nabla f|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos\varphi=|\nabla f|\cdot\cos\varphi,$$

gdyż $|\vec{u}|=1$.
Ponieważ $\cos\varphi=1$ gdy $\varphi=0$, więc pochodna ma wartość maksymalną gdy $\vec{u}$ ma ten sam kierunek co ∇f. Wynika stąd, że wektor ∇f wskazuje kierunek, w którym funkcja rośnie najszybciej (a ponadto prędkość tego wzrostu dana jest przez długość wektora ∇f). Analogicznie, wektor $-\nabla f$ wskazuje kierunek, w którym funkcja najszybciej maleje.
Uwaga. Analogicznie definiuje się pochodną kierunkową w przestrzeni. Jeżeli $f(x,y,z)$ jest funkcją trzech zmiennych, to pochodną w kierunku wektora $\vec{v}=[v_1,v_2,v_3]$ obliczamy tak, że punkty $(x_0+tv_1,y_0+tv_2,z_0+tv_3)$ przebiegają prostą wyznaczoną przez (x_0,y_0,z_0) i wersor $\vec{u}=[\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma]$, gdzie α,β,γ są kątami jaki wektor $\vec{v}$ tworzy z osią Ox. Zatem prosta ma równania

$$x=x_0+s\cos\alpha,\ y=y_0+s\cos\beta,\ z=z_0+\cos\gamma.$$

A więc $f(x,y,z) = f(x(s),y(s),z(s))$ jest funkcją jednej zmiennej oraz

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma.$$

Uwaga. Wyrażenie

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

nazywamy *wektorowym operatorem różniczkowania* lub *operatorem nabla*. Nie ma on sensu bez obiektu na który działa, ale jest używany formalnie jako wektor.

2. Pole wektorowe

2.1. Określenie i przykłady

Definicja 1. Jeżeli każdemu punktowi obszaru (płaskiego lub przestrzennego) odpowiada określony wektor $\overrightarrow{F}$, to mówimy, że w obszarze określone jest *pole wektorowe* (lub, że obszar jest polem wektorowym).

Współrzędne wektora pola są funkcjami współrzędnych (x, y, z) punktu zaczepienia wektora

$$F_x = P(x,y,z), \quad F_y = Q(x,y,z), \quad F_z = R(x,y,z).$$

Przykłady:
1. Opisać pole $\overrightarrow{F}(x,y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$.
Zacznijmy od tabelki:

(x,y)	$(0,1)$	$(1,0)$	$(0,-1)$	$(-1,0)$	$(1,1)$	$(-1,1)$	$(-1,-1)$	$(1,-1)$
$\overrightarrow{F}(x,y)$	$-\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{i}$	$-\vec{j}$	$-\vec{i}+\vec{j}$	$-\vec{i}-\vec{j}$	$\vec{i}-\vec{j}$	$\vec{i}+\vec{j}$

Zaznaczając wektory na płaszczyźnie tak, że wektor $\overrightarrow{F}(x,y)$ zaczepiamy w punkcie (x,y) uzyskujemy graficzną ilustrację pola. Pole to można interpretować jako pole prędkości punktów obracającego się koła.

2. Pole grawitacyjne. Jeżeli w początku układu znajduje się masa M, to zgodnie z prawem grawitacji Newtona działa ona na ciało o masie m umieszczone w punkcie $P(x,y,z)$ z siłą

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = -G\frac{Mm}{|\vec{r}|^2}\vec{u},$$

gdzie G jest stałą grawitacji, $\vec{r}$ jest wektorem wodzącym punktu P, a $\vec{u} = \frac{1}{|\vec{r}|}\vec{r}$.

3. Pole elektryczne. Jeżeli w początku układu znajduje się ładunek punktowy Q, to zgodnie z prawem Coulomba działa ona na ładunek q umieszczony w punkcie $P(x,y,z)$ z siłą

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = k\frac{Qq}{|\vec{r}|^2}\vec{u},$$

gdzie k jest stałą elektrostatyczną, $\vec{r}$ jest wektorem wodzącym punktu P, a $\vec{u} = \frac{1}{|\vec{r}|}\vec{r}$.
Ogólniej, układ N ładunków q_i umieszczonych w punktach $P_i(x_i, y_i, z_i)$ działa na ładunek q umieszczony w punkcie $P(x,y,z)$ z siłą

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = kq\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}^3.$$

Inne pola to np. pole magnetyczne, pole prędkości przepływu cieczy, pole prędkości wiatru.

Pola 2 i 3 opisane wyżej to tzw. *pola centralne*. Jest to takie pole, że jeżeli początek układu współrzędnych umieścimy w centrum pola, to

$$\overrightarrow{F}(\vec{r}) = f(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

gdzie $\vec{r}$ jest wektorem wodzącym punktu, $f(r)$ jest dowolną funkcją skalarną zależną jedynie od odległości r od centrum pola. Wartość wektora pola jest więc identyczna dla wszystkich punktów położonych w równej odległości od centrum; gdy funkcja $f(r)$ jest dodatnia, to wektory pola w odległości r są ułożone na sferze o promieniu r i są skierowane od centrum; gdy funkcja $f(r)$ jest ujemna – to wektory pola są skierowane do centrum.

2.2. Praca siły

Składowa siły $\overrightarrow{F}$ w kierunku wektora $\vec{v}$ jest to rzut $\overrightarrow{F}$ na oś $\vec{v}$. Wynosi ona

$$\frac{\overrightarrow{F} \circ \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\vec{v}.$$

Długość tego wektora to $\frac{\overrightarrow{F} \circ \vec{v}}{|\vec{v}|}$.
Gdy siła przesuwa obiekt o $|\vec{v}|$, to praca wynosi

$$\frac{\overrightarrow{F} \circ \vec{v}}{|\vec{v}|}|\vec{v}| = \overrightarrow{F} \circ \vec{v}.$$

Zatem również w tym przypadku:

$$\text{praca} = \text{siła} \circ \text{przesunięcie},$$

z tym, że mnożenie oznacza w tym przypadku iloczyn skalarny.
Jeżeli siła zmienia się, to jest reprezentowana przez pole wektorowe $\overrightarrow{F}$. Przesunięcie także może być zmienne, gdyż obiekt może się przemieszczać wzdłuż krzywej (płaskiej bądź przestrzennej). Przypuśćmy, że droga jest określona funkcją wektorową $\vec{r}(t)$. W każdym punkcie drogi "mały" wektor styczny $\vec{r}\,'\Delta t$ jest aproksymacją przemieszczenia w czasie Δt bliskim 0. Zatem praca w tym czasie w przybliżeniu wynosi $\overrightarrow{F} \circ \vec{r}\,'\Delta t$, a praca całkowita w przedziale czasu $[t_0, t_1]$ to całka

$$\int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{F} \circ \vec{r}\,' \,\mathrm{d}\,t.$$

Można to zapisać w różnych postaciach:

$$\int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{F} \circ \vec{r}\,' \,\mathrm{d}\,t = \int_C \overrightarrow{F} \,\mathrm{d}\,\vec{r},$$

gdzie $\mathrm{d}\,\vec{r} = \vec{r}\,' \,\mathrm{d}\,t$, lub

$$\int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{F} \circ \vec{r}\,' \,\mathrm{d}\,t = \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{F} \circ \frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|}|\vec{r}\,'| \,\mathrm{d}\,t = \int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{F} \circ \overrightarrow{T}|\vec{r}\,'| \,\mathrm{d}\,t = \int_C \overrightarrow{F} \circ \overrightarrow{T} \,\mathrm{d}\,s,$$

gdzie $\overrightarrow{T}$ jest jednostkowym wektorem stycznym, $\mathrm{d}\,s = |\vec{r}\,'| \,\mathrm{d}\,t$ różniczką przesunięcia, a C jest drogą obiektu.
Jeżeli $\overrightarrow{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, to można też napisać:

$$\begin{aligned}\int_C \overrightarrow{F}\vec{r}\,' \,\mathrm{d}\,t &= \textstyle\int_C (P,Q,R) \circ (x',y',z') \,\mathrm{d}\,t = \int_C (P\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} + Q\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} + R\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t}) \,\mathrm{d}\,t = \\ &= \textstyle\int_C P \,\mathrm{d}\,x + \int_C Q \,\mathrm{d}\,y + \int_C R \,\mathrm{d}\,z,\end{aligned}$$

i podobnie dla przypadku dwuwymiarowego.

2.3. Gradient

Definicja 2. Niech $V = V(x, y, z)$ będzie funkcją skalarną. Wektor o współrzędnych

$$P = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial V}{\partial z}$$

nazywamy *gradientem* skalara V i piszemy $\overrightarrow{F} = \operatorname{grad} V$ lub ∇V.

Zatem

$$\operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}.$$

Funkcję V nazywamy wtedy *potencjałem* pola $\overrightarrow{F}$. Natomiast pole nazywamy *potencjalnym* lub *zachowawczym*.

Przykład. Niech $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Wtedy

$$\operatorname{grad} r = \frac{x}{r}\vec{i} + \frac{u}{r}\vec{j} + \frac{z}{r}\vec{k} = \frac{\vec{r}}{r},$$

czyli gradient jest wersorem zgodnie skierowanym z wektorem $\vec{r} = [x, y, z]$.
Zbiór wszystkich punktów $M(x, y, z)$ mających ten sam potencjał c tworzy powierzchnię $V(x, y, z) = c$. Takie powierzchnie nazywamy *ekwipotencjalnymi.*
Rozpatrzmy krzywą regularną $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t)$ leżącą na powierzchni ekwipotencjalnej, tzn.

$$\forall_{t \in T} \; V(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) = c,$$

gdzie c jest pewną stałą. Stąd, po zróżniczkowaniu względem t:

$$\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 0,$$

czyli wektory $\operatorname{grad} V$ i $\vec{t} = [\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}]$ są prostopadłe. Zatem **gradient jest wektorem prostopadłym do powierzchni ekwipotencjalnej**.

2.4. Rotacja

Motywacja fizyczna. Rozważmy pole wektorowe $\overrightarrow{F} = [P, Q, R]$ które można sobie wyobrazić jako przepływ cieczy. Wyobraźmy też sobie, że do cieczy wkładamy małą turbinkę. Jeżeli w cieczy występuje wir, to po włożeniu turbinki w środek wiru zacznie się ona obracać. Ogólniej, jeżeli występuje różnica w prędkości przepływu między jedną stroną turbinki a drugą, to spowoduje to ruch turbinki. Np. w rzece prędkość przepływu jest na ogół większa w środku nurtu, więc turbinka umieszczona w rzece (z osią pionową, czyli inaczej niż np. w młynie, gdzie oś jest pozioma) będzie się obracać. Pole wykonuje wtedy pracę, której wielkość zależy od zawirowań przepływu. Tę pracę wykonaną wzdłuż krzywej zamkniętej nazwiemy *cyrkulacją pola* wzdłuż tej krzywej.
Aby zbudować model matematyczny rozważmy dla uproszczenia tylko jedną składową krążenia, tę w płaszczyźnie Oxy. Rozważmy mały prostokąt w tej płaszczyźnie, z jednym wierzchołkiem (x_0, y_0) i przeciwległym mu po przekątnej wierzchołkiem $(x_0 + dx, y_0 + dy)$. Przy obliczaniu pracy pola wokół tego prostokąta powinniśmy całkować składową pola $\overrightarrow{F}$ równoległą do każdej krawędzi po wszystkich czterech bokach prostokąta. A zatem musimy całkować $\overrightarrow{F} \circ \mathrm{d}\vec{r}$ po konturze prostokąta, gdzie $\mathrm{d}\vec{r}$ jest przyrostem wektora wodzącego $\vec{r}$ wzdłuż krawędzi. Kierunek w jakim poruszamy się po konturze ma znaczenie; przyjmijmy, że jest to obieg dodatni czyli przeciwny do wskazówek zegara. Zatem $\mathrm{d}\vec{r} = dx\vec{i}$ na dolnej krawędzi oraz $\mathrm{d}\vec{r} = -dx\vec{i}$ na górnej, $\mathrm{d}\vec{r} = dy\vec{j}$ na prawej, $\mathrm{d}\vec{r} = -dy\vec{j}$ na lewej krawędzi. Ruch powodują składowe pola styczne do kierunku, a więc należy obliczać iloczyn skalarny $\overrightarrow{F} \circ \mathrm{d}\vec{r}$. Składowe P i Q są funkcjami x, y, więc można wykorzystać różniczkę. Dokładniej, w punkcie (x_0, y_0)

jest $P = P(x_0, y_0)$, a w $(x_0, y_0 + dy)$ jest $P = P(x_0, y_0 + dy) \approx P(x_0, y_0) + \frac{\partial P}{\partial y} dy$. Zatem "wkład" do całki z krawędzi dolnej i górnej wynosi

$$P(x_0, y_0)dx + \big(P(x_0, y_0) + \frac{\partial P}{\partial y} dy\big)(-dx) = -\frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

Analogicznie, wkład z krawędzi lewej i prawej to:

$$Q(x_0, y_0)(-dy) + \big(Q(x_0, y_0) + \frac{\partial Q}{\partial x} dx\big)dy = \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy.$$

Dodając obie części otrzymujemy

$$\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy.$$

Gdy podzielimy przez $dxdy$ otrzymujemy cyrkulację na jednostkę powierzchni jako

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Przeprowadzając podobne rozumowanie dla pozostałych płaszczyzn układu $Oxyz$ otrzymujemy analogiczne wyniki. To uzasadnia następującą definicję.

Definicja 3. *Rotacją (wirowością)* pola $\overrightarrow{F} = [P, Q, R]$ nazywamy wektor o współrzędnych:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Oznaczenie rot $\overrightarrow{F}$ lub curl $\overrightarrow{F}$.

Łatwiejszy do zapamiętania jest następujący wzór

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{F} = \nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Pole wektorowe takie, że rot $\overrightarrow{F} = 0$ nazywamy *bezwirowym*.

Przykład. Niech $\overrightarrow{F} = \operatorname{grad} V$. Wtedy

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{F} = \Big(\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}\Big)\vec{i} + \Big(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}\Big)\vec{j} + \Big(\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\Big)\vec{k} = \vec{0}$$

Zatem pole mające potencjał jest bezwirowe. Można wykazać, że także na odwrót: pole bezwirowe ma potencjał.

2.5. Dywergencja

Definicja 4. *Dywergencją (rozbieżnością)* pola $\overrightarrow{F} = [P, Q, R]$ nazywamy skalar:

$$\operatorname{div} \overrightarrow{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Twierdzenie 1. $\operatorname{div} \operatorname{rot} \overrightarrow{F} = 0$

Pole wektorowe takie, że div $\overrightarrow{F} = 0$ nazywamy *bezźródłowym*.

Przykład. Obliczyć div $\overrightarrow{F}$ i rot $\overrightarrow{F}$, gdy $\overrightarrow{F} = [y^2, z^2, xy]$.

$$\operatorname{div}(y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + xy\vec{k}) = \frac{\partial y^2}{\partial x} + \frac{\partial z^2}{\partial y} + \frac{\partial xy}{\partial z} = 0$$

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & xy \end{vmatrix} = (x-2z)\vec{i} - y\vec{j} - 2y\vec{k}.$$

Oznaczenia. Wiemy już, że operator

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

nazywamy *operatorem nabla*. Wtedy możemy pisać

$$\operatorname{grad} V = \nabla V \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = \nabla \times \overrightarrow{F} \tag{2}$$

$$\operatorname{div}\overrightarrow{F} = \nabla \circ \overrightarrow{F} \tag{3}$$

Natomiast operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z},$$

nazywamy operatorem różniczkowym Laplace'a lub *laplasjanem.*
Wykażemy teraz pewną własność, którą ma zarówno centralne pole grawitacyjne jak i elektryczne.

Lemat 1. *Wykazać, że dla pola* $\overrightarrow{F} = \frac{A}{r^3}\vec{r}$, *gdzie* A *jest stałą,* $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ *oraz* $r = |\vec{r}|$ *zarówno dywergencja, jak i rotacja jest równa 0.*

D o w ó d. Dla uproszczenia zapisów zauważmy najpierw, że

$$\frac{\partial r^3}{\partial x} = 3r^2\frac{\partial r}{\partial x} = 3r^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot 2x = 3rx$$

oraz

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{r^3 - 3x^2 r}{r^6} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}.$$

Analogiczne wzory są dla pochodnych po y i z.
Zatem

$$\operatorname{div}\left(\frac{A}{r^3}\vec{r}\right) = A\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^3} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{r^3} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{r^3}\right) = A\left(\frac{r^2-3x^2}{r^5} + \frac{r^2-3y^2}{r^5} + \frac{r^2-3z^2}{r^5}\right) = 0.$$

Następnie

$$\operatorname{rot}\left(\frac{A}{r^3}\vec{r}\right) = A\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{r^3} & \frac{y}{r^3} & \frac{z}{r^3} \end{vmatrix} =$$

$$= A\left(\left(-\frac{3yz}{r^5} + \frac{3yz}{r^5}\right)\vec{i} - \left(-\frac{3xz}{r^5} + \frac{3xz}{r^5}\right)\vec{j} + \left(-\frac{3xy}{r^5} + \frac{3xy}{r^5}\right)\vec{k}\right) = \vec{0}.$$

2.6. Praca siły w polu zachowawczym

Niech $\overrightarrow{F}$ będzie potencjalnym polem wektorowym z potencjałem f. W fizyce energię potencjalną cząstki w punkcie (x,y,z) określamy jako $p(x,y,z) = -f(x,y,z)$. Zatem

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = -\nabla p(x,y,z).$$

Jeśli A, B są dwoma punktami, to praca wykonana przez pole $\overrightarrow{F}$ wzdłuż krzywej K o końcach A, B wynosi

$$W = \int_A^B \overrightarrow{F} \circ \mathrm{d}\,\vec{r} = -p(x,y,z)|_A^B = p(A) - p(B).$$

Zatem praca jest różnicą energii potencjalnych w punktach A i B. Jeśli B jest punktem, w którym potencjał wynosi 0, to $W = p(A)$. Jest to klasyczne podejście fizyczne, w którym energię potencjalną określa się jako energię, którą ciało posiada z racji swego położenia. Przypuśćmy, że cząstka porusza się od A do B wzdłuż krzywej K. Jej położenie w chwili t określone jest funkcjami

$$x = g(t),\ y = h(t),\ z = k(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b.$$

Niech $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ będzie wektorem wodzącym punktu. Wtedy

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}, \quad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,t}.$$

Mamy

$$W = \int_A^B \overrightarrow{F} \circ \mathrm{d}\,\vec{r} = \int_a^b \overrightarrow{F} \circ \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t}\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b \overrightarrow{F} \circ \vec{v}\,\mathrm{d}\,t.$$

Z drugiej zasady dynamiki Newtona $\overrightarrow{F} = m\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,t}$, więc

$$W = \int_a^b m\frac{\mathrm{d}\,\vec{v}}{\mathrm{d}\,t}\circ\vec{v}\,\mathrm{d}\,t = m\int_a^b \frac{1}{2}\frac{d}{\mathrm{d}\,t}(\vec{v}^2)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}m\int_a^b \frac{d}{\mathrm{d}\,t}(v^2)\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}mv^2|_a^b = \frac{1}{2}m[v(b)^2 - v(a)^2].$$

Ale $\frac{1}{2}mv^2$ jest energią kinetyczną cząstki o masie m i prędkości v. Jeżeli więc $K(A)$ i $K(B)$ są energiami kinetycznymi cząstki w punktach A i B odpowiednio, to

$$W = K(B) - K(A).$$

Zatem

$$W = p(A) - p(B) = K(B) - K(A),$$

lub

$$p(A) + K(A) = p(B) + K(B).$$

Ostatnia równość stwierdza, że gdy cząstka porusza się w polu zachowawczym od jednego punktu do drugiego, to suma energii potencjalnej i kinetycznej pozostaje stała. Zatem całkowita energia się nie zmienia. Ten fakt znany jest jako *zasada zachowania energii.* Tłumaczy to też nazwę *pole zachowawcze.*

3. Twierdzenia całkowe

3.1. Twierdzenie Greena

W podstawowym kursie analizy matematycznej poznaje się następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. (Greena) *Jeżeli funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ mają ciągłe pochodne cząstkowe w obszarze D zawierającym regularną i zamkniętą krzywą K i zawierającym obszar ograniczony tą krzywą oraz jeśli krzywa jest zorientowana dodatnio, to*

$$\oint\limits_K P(x,y)\,\mathrm{d}\,x + Q(x,y)\,\mathrm{d}\,y = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

Twierdzenie to można sformułować w postaci wektorowej, bo funkcje P i Q określają pole wektorowe na płaszczyźnie. Przyjmując

$$\overrightarrow{F}(x,y) = P\vec{i} + Q\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$$

możemy obliczyć rotację

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = \nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Z drugiej strony, jeśli $\overrightarrow{T} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\vec{k}$ jest jednostkowym wektorem stycznym, to

$$P\,\mathrm{d}\,x + Q\,\mathrm{d}\,y = \left(P \cdot \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,s} + Q \cdot \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,s}\right) = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{T}\,\mathrm{d}\,s.$$

A zatem tezę twierdzenia Greena można zapisać w postaci

$$\oint\limits_K \overrightarrow{F} \circ \overrightarrow{T}\,\mathrm{d}\,s = \iint\limits_D \operatorname{rot}\overrightarrow{F} \circ \vec{k}\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y \tag{4}$$

Przydatność takiego zapisu staje się bardziej widoczna, gdy rozważamy trójwymiarowy odpowiednik tego twierdzenia znany jako twierdzenie Stokesa. Sformułujemy je nieco później.

3.2. Twierdzenie Ostrogradskiego-Gaussa

Twierdzenie Ostrogradskiego-Gaussa, nazywane także twierdzeniem o dywergencji, podaje związek między całką potrójną po objętości, a całką powierzchniową po zewnętrznej stronie powierzchni zamkniętej ograniczającej tę objętość.
Najpierw podamy "skalarną" wersję tego twierdzenia.

Twierdzenie 3. *Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie obszarem ograniczonym powierzchnią zamkniętą S, a $P(x,y,z), Q(x,y,z)$ i $R(x,y,z)$ będą funkcjami posiadającymi ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu na obszarze V. Wtedy*

$$\iint\limits_S P\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z + Q\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,z + R\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z,$$

gdzie całka powierzchniowa liczona jest po zewnętrznej stronie powierzchni S.

Sformułowanie "wektorowe" uzyskamy wprowadzając funkcje wektorową $\overrightarrow{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ i jednostkowy wektor $\vec{n}$ normalny do zewnętrznej strony powierzchni S w punkcie (x,y,z). Wtedy teza twierdzenia ma postać

$$\iint\limits_S \overrightarrow{F} \circ \vec{n}\,\mathrm{d}\,S = \iiint\limits_V \nabla \circ \overrightarrow{F}\,\mathrm{d}\,V, \tag{5}$$

lub

$$\iint\limits_S \overrightarrow{F} \circ \vec{n}\,\mathrm{d}\,S = \iiint\limits_V \operatorname{div}\overrightarrow{F}\,\mathrm{d}\,V. \tag{6}$$

Całkę powierzchniową po lewej stronie wzoru nazywamy *strumieniem pola wektorowego* $\overrightarrow{F}$ przez powierzchnię S. Ma to związek z intuicyjnym pojęciem strumienia. Na przykład, jeżeli polem wektorowym jest pole prędkości przepływającej cieczy, to strumień takiego pola oznacza ilość (masę) cieczy przechodzącą przez zadaną powierzchnię w jednostce czasu. W najprostszym przypadku pola stałego jest to iloczyn wartości wektora pola przez pole powierzchni S, a w ogólnym przypadku jest to całka powierzchniowa.

Definicja 5. Strumieniem pola wektorowego $\overrightarrow{F}$ *przez powierzchnię S nazywamy całkę*

$$\iint\limits_S \overrightarrow{F} \circ \vec{n}\,\mathrm{d}\,S.$$

Przykład. Niech S będzie powierzchnią zamkniętą ograniczającą obszar przestrzenny Q, w którego wnętrzu znajduje się początek układu współrzędnych O. Wykazać, że dla pola postaci $\overrightarrow{F} = \frac{q}{r^3}\vec{r}$, gdzie q jest stałą, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ oraz $r = |\vec{r}|$ strumień pola przez powierzchnię S wynosi $4\pi q$, niezależnie od kształtu powierzchni S.

D o w ó d. Nie można zastosować twierdzenia Ostrogradskiego-Gaussa bezpośrednio, ponieważ $\overrightarrow{F}$ nie jest ciągłe w punkcie O. Niech S_1 będzie sferą o środku O i promieniu a tak małym, że $S_1 \subset Q$. Niech Q_1 oznacza obszar leżący między powierzchniami S_1 i S. W tym obszarze $\overrightarrow{F}$ jest ciągła i można zastosować twierdzenie Ostrogradskiego-Gaussa. Zatem

$$\iiint\limits_{Q_1} \operatorname{div} \overrightarrow{F} \, \mathrm{d}\, V = \iint\limits_{S} \overrightarrow{F} \circ \vec{n} \, \mathrm{d}\, S + \iint\limits_{S_1} \overrightarrow{F} \circ \vec{n} \, \mathrm{d}\, S.$$

Z lematu 1 wiemy, że $\operatorname{div} \overrightarrow{F} = 0$. Zatem

$$\iint\limits_{S} \overrightarrow{F} \circ \vec{n} \, \mathrm{d}\, S = -\iint\limits_{S_1} \overrightarrow{F} \circ \vec{n} \, \mathrm{d}\, S,$$

z czego już wynika, że strumień nie jest zależny od powierzchni S. Aby wykazać, że wynosi on $4\pi q$ wystarczy obliczyć całkę

$$\iint\limits_{S_1} \overrightarrow{F} \circ \vec{n} \, \mathrm{d}\, S.$$

W powyższej całce $\vec{n}$ oznacza wektor normalny do powierzchni skierowany na zewnątrz obszaru, tzn. w przypadku powierzchni S_1 wskazuje on w kierunku poczatku układu. Zatem $\vec{n} = -\frac{\vec{r}}{r}$, gdzie $r = a$. A zatem

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S} \overrightarrow{F} \circ \vec{n} \, \mathrm{d}\, S &= -\iint\limits_{S_1} \frac{q}{r^3}\vec{r} \circ \Big(-\frac{1}{r}\vec{r}\Big) \mathrm{d}\, S = \iint\limits_{S_1} \frac{q}{r^4}\vec{r} \circ \vec{r} \, \mathrm{d}\, S = \iint\limits_{S_1} \frac{q}{r^2} \, \mathrm{d}\, S = \\ &= \frac{q}{a^2} \iint\limits_{S_1} \mathrm{d}\, S = \frac{q}{a^2} 4\pi a^2 = 4\pi q.\end{aligned}$$

Interpretacja fizyczna przykładu. Jeśli w początku układu współrzędnych umieścimy ładunek q, to oddziałuje on na ładunek jednostkowy umieszczony w punkcie (x, y, z) z siłą $\overrightarrow{F}(x, y, z) = \frac{cq}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$, gdzie c jest pewną stałą. Wynik z powyższego przykładu oznacza, że strumień siły $\overrightarrow{F}$ przez dowolną powierzchnię zamkniętą zawierającą początek układu wynosi $4\pi cq$, a zatem nie zależy od kształtu powierzchni, a tylko od q. Jest to *prawo Gaussa dla elektryczności*, które w Wikipedii ma następujące sformułowanie:
Strumień natężenia pola elektrycznego, przenikający przez dowolną powierzchnię zamkniętą w jednorodnym środowisku o bezwzględnej przenikalności elektrycznej ε, jest równy stosunkowi całkowitego ładunku znajdującego się wewnątrz tej powierzchni do wartości tejże przenikalności.

3.3. Twierdzenie Stokesa

Twierdzenie Greena można uogólnić na przypadek krzywej w przestrzeni regularnej i zamkniętej, będącej brzegiem powierzchni S.

Intuicyjne uzasadnienie. Jeżeli w przestrzeni mamy powierzchnię S której brzegiem jest krzywa K, to całkowita rotacja pola $\overrightarrow{F}$ na tej powierzchni może być obliczana jako suma rotacji po wszystkich częściach tej powierzchni. Dzielimy więc powierzchnię S na małe części. Rotacja pola na każdej z tych części jest cyrkulacją pola na brzegu tej części (patrz Motywacja fizyczna na str. 6). Kluczową rzeczą jest fakt, że każda krawędź jednego kawałka, która jest wspólna z drugim kawałkiem będzie przy obliczaniu całek przechodzona dwa razy, ale w kierunkach przeciwnych. Zatem te składniki się zredukują. Pozostaną tylko składniki związane z brzegiem obszaru, bo one są przechodzone jednokrotnie. Wniosek końcowy jest taki, że całka z rotacji po powierzchni jest równa cyrkulacji po brzegu tej powierzchni.

Twierdzenie 4. (Stokesa) *Jeżeli $\overrightarrow{F}$ jest funkcją wektorową mającą ciągłe pochodne cząstkowe w obszarze D zawierającym powierzchnię S i krzywa K ograniczająca tę powierzchnię jest zorientowana dodatnio, to*

$$\oint\limits_K \overrightarrow{F} \circ \overrightarrow{T} \,\mathrm{d}\, s = \iint\limits_S \mathrm{rot}\, \overrightarrow{F} \circ \vec{n} \,\mathrm{d}\, S, \tag{7}$$

gdzie $\overrightarrow{T}$ jest jednostkowym wektorem stycznym do krzywej K, a $\vec{n}$ jest jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni S.

Przykład. Obliczyć $\oint\limits_K y \,\mathrm{d}\, x + z \,\mathrm{d}\, y + x \,\mathrm{d}\, z$, gdzie K jest okręgiem w przestrzeni określonym równaniami $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ i $x + y + z = 0$, zorientowanym dodatnio gdy patrzymy z dodatniej strony osi Ox.

Zastosujemy twierdzenie Stokesa przyjmując, że S jest kołem o promieniu a leżącym w płaszczyźnie $x + y + z = 0$. Mamy tutaj $\overrightarrow{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$, więc

$$\mathrm{rot}\, \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = (0-1)\vec{i} - (1-0)\vec{j} + (0-1)\vec{k} = -(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = -[1,1,1].$$

Wektor normalny do płaszczyzny to $[1,1,1]$, a jednostkowy wektor normalny to $\frac{1}{\sqrt{3}}[1,1,1]$. Zatem z twierdzenia Stokesa mamy

$$\oint\limits_K y \,\mathrm{d}\, x + z \,\mathrm{d}\, y + x \,\mathrm{d}\, z = \iint\limits_S -\frac{1}{\sqrt{3}}(1+1+1) \,\mathrm{d}\, S = -\sqrt{3} \iint\limits_S \mathrm{d}\, S = \sqrt{3}\pi a^2$$

bo ostatnia całka powierzchniowa ma wartość równą polu koła.